



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 FEBRUARIE 2019
Clasa a VII-a**

Problema 1. Fie a, b, c trei numere reale cu proprietățile $abc = 1$ și $a + ab + 1 \neq 0$. Demonstrează că:

- a) $b + bc + 1 \neq 0$;
b) $\frac{a+2018}{a+ab+1} + \frac{b+2018}{b+bc+1} + \frac{c+2018}{c+ca+1} = 2019$.

Florin Marcu, Călărași

Soluție: a) $abc = 1 \Rightarrow a, b, c \in \mathbb{R}^*$; $a + ab + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, astfel încât $a + a \cdot b + 1 = x \Leftrightarrow abc + (abc)b + bc = bcx \Rightarrow b + bc + 1 \neq 0$.

b) $\frac{a+2018}{a+ab+1} + \frac{b+2018}{b+bc+1} + \frac{c+2018}{c+ca+1} = \frac{a+2018}{a+ab+1} + \frac{ab+2018a}{ab+abc+a} + \frac{abc+2018ab}{abc+(abc)a+ab} = 2019$.

Problema 2.

a) Fie x un număr real. Precizează care dintre următoarele egalități nu este adevărată:

$E_1) x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$; $E_2) x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 3$; $E_3) 9x^2 - 12x + 5 = (3x-2)^2 + 1$.

b) Fie triunghiul ABC și a, b, c numere reale pozitive astfel încât $AB = c, BC = a, AC = b$. Dacă este adevărată inegalitatea: $\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 4b + 5} + \sqrt{4c^2 - 12c + 10} \leq 3$, atunci calculează perimetrul triunghiului ABC .

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: a) este falsă egalitatea E_2 ;

b) $\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 4b + 5} + \sqrt{4c^2 - 12c + 10} = \sqrt{(a-1)^2 + 1} + \sqrt{(b-2)^2 + 1} + \sqrt{(3c-2)^2 + 1} \geq 3 \Rightarrow$
 $\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 4b + 5} + \sqrt{4c^2 - 12c + 10} = 3 \Leftrightarrow a = 1, b = 2, c = \frac{3}{2} \Rightarrow a + b + c = \frac{9}{2}$.

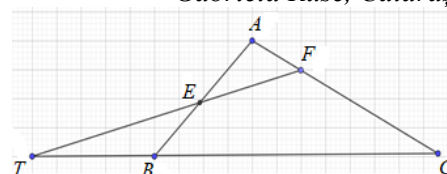
Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB = 15$ cm și $AC = 18$ cm, punctele E și F aparțin segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, astfel încât $AE = 12$ cm, $AF = 10$ cm. Dacă și $BC \cap EF = \{T\}$, atunci:

a) arată că $\triangle EAF \sim \triangle CAB$;

b) determină $\frac{A_{TEB}}{A_{ABC}}$.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ și $\angle BAC \equiv \angle EAF \Rightarrow \triangle EAF \sim \triangle CAB$;



b) $\triangle EAF \sim \triangle CAB \Rightarrow \angle AEF \equiv \angle ACB$ și $\angle AFE \equiv \angle ABC$; $\angle AEF \equiv \angle TEB$ și $\angle AEF \equiv \angle ACB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle TEB \sim \triangle TCF$; $\frac{EB}{FC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{A_{TEB}}{A_{TCF}} = \frac{9}{64}$ (1); $\triangle EAF \sim \triangle CAB$ și $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A_{AEF}}{A_{ACB}} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{A_{ACB} - A_{AEF}}{A_{ACB}} = \frac{5}{9}$
 $\Leftrightarrow \frac{A_{BEFC}}{A_{ABC}} = \frac{5}{9}$ (2). (1) $\Leftrightarrow \frac{A_{TEB}}{A_{BEFC}} = \frac{9}{55}$ (3); (2) și (3) $\Rightarrow \frac{A_{TEB}}{A_{ABC}} = \frac{1}{11}$.

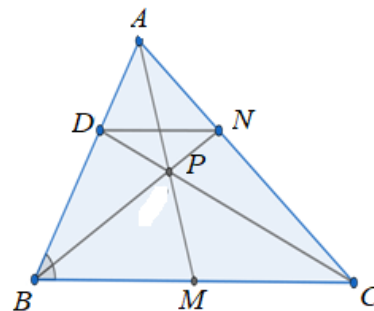
Problema 4. În $\triangle ABC$, bisectoarea $\angle ABC$ intersectează latura (AC) în punctul N și punctul M este mijlocul laturii (BC) . Dacă $AM \cap BN = \{P\}$ și $AB \cap CP = \{D\}$, atunci demonstrează că triunghiul $\triangle BDN$ este isoscel.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție: $AM \cap BN \cap CD = \{P\} \Rightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \stackrel{BM=MC}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{CN} \stackrel{Th.}{\Rightarrow} DN \parallel BC \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle DNB \equiv \sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle DBN \Rightarrow \triangle BDN \text{ este isoscel.}$



Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 2. a) 2 puncte, b) 5 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. 7 puncte.